ISSN 2710-1673. Штучний інтелект, 2020, № 3

УДК 519.85 DOI: https://doi.org/10.15407/jai2020.03.051

А.М. Чугай, С.В. Альохіна
Інститут проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України, Україна
вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, 61046

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЙНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ПРОЄКТУВАННЯ В ЗАДАЧАХ БЕЗПЕЧНОГО ЗБЕРІГАННЯ ВІДПРАЦЬОВАНОГО ЯДЕРНОГО ПАЛИВА

A.M. Chugay, S.V. Alyokhina
A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems
of the National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine
2/10, Pozharskogo St., Kharkiv, 61046

USING OF OPTIMIZATION GEOMETRIC DESIGN METHODS FOR THE PROBLEMS OF THE SPENT NUCLEAR FUEL SAFE STORAG

Анотація. Задачі оптимізації розміщення об’єктів мають широкий спектр застосування. Одним з таких застосувань є задача розміщення контейнерів з відпрацьованим ядерним паливом (ВЯП) на площадці зберігання. Розв’язання задачі може бути зведене до розв’язання задачі пошуку оптимального розміщення заданого набору конгруентних кіл у багатозв’язній області з урахуванням заданих технологічних обмежень. У роботі побудовано математичну модель задачі та розглянуто її особливості. Запропонований підхід заснований на математичному моделюванні відносин між геометричними об'єктами за допомогою методу phi-функцій. Це дозволило звести вирішення задачі до задачі нелінійного програмування. На сьогоднішній день важливою науковою проблемою є проблема створення умов для безпечного зберігання відпрацьованого ядерного палива. У процесі створення будь-якого сухого сховища відпрацьованого ядерного палива можна виділити наступні основні етапи: вибір майданчика розташування, проєктування сховища, будівництво, експлуатація та зняття з експлуатації. Повна перевірка на відповідність сховища та його елементів зазначеним нормам зазвичай розпочинає здійснюватися на етапі проєктування. На етапі ж вибору майданчика розташування перевірка на дотримання норм безпеки здійснюється лише з точки зору впливу сховища у цілому на навколишнє середовище. Такий підхід не можна вважати у повній мірі доцільним, адже, врахувавши, наприклад, усі кліматичні особливості території розташування майбутнього сховища, можна корегувати теплові режими зберігання відпрацьованого ядерного палива. Аналогічно можна вважати необхідним аналіз та вибір форми майданчика зберігання з метою розміщення максимально можливої кількості контейнерів з ВЯП. Такий вибір, вочевидь, повинен здійснюватися із врахуванням норм ядерної, радіаційної та теплової безпеки, а також із дотриманням технологічних обмежень. Проблему пошуку оптимального розміщення контейнерів з урахуванням заданих технологічних обмежень можна сформулювати у вигляді задачі оптимізації геометричного проєктування. Тому метою дослідження є побудова математичної моделі задачі та дослідження її характеристик для розробки ефективних методів розв’язання. Запропонований підхід базується на математичному моделюванні відносин між геометричними об'єктами за допомогою методу phi-функцій. Це дозволило звести вирішення задачі до задачі нелінійного програмування.

Ключові слова: відпрацьоване ядерне паливо; ядерна та теплова безпека; задачі оптимізації упаковки; математичне моделювання; phi-функція.

Abstract. Packing optimization problems have a wide spectrum of real-word applications. One of the applications of the problems is problem of placement of containers with spent nuclear fuel (SNF) on the storage platform. The solution of the problem can be reduced to the solution of the problem of finding the optimal placement of a given set of congruent circles into a multiconnected domain taking into account technological restrictions. A mathematical model of the prob-lem is constructed and its peculiarities are considered. Our approach is based on the mathematical modelling of rela-tions between geometric objects by means of phi-function technique. That allowed us to reduce the problem solving to nonlinear programming. Today, an important scientific problem is the problem of creating conditions for safe storage of spent nuclear fuel. In the process of creating any dry spent nuclear fuel storage, the following main stages can be identified: site selection, storage design, construction, operation and decommissioning. A full check for compliance of the repository and its elements with these standards usually begins at the design stage. At the stage of site selection, the inspection for compliance with safety standards is carried out only in terms of the impact of the repository as a whole on the environment. This approach cannot be considered fully appropriate, because, taking into ac-

count, for example, all the climatic features of the future storage site, it is possible to adjust the thermal storage regimes of spent nuclear fuel. Similarly, it can be considered necessary to analyze and select the shape of the storage site in order to accommo-date the maximum possible number of spent fuel containers. Such a choice, obviously, should be made taking into ac-count the norms of nuclear, radiation and thermal safety, as well as in compliance with technological limitations. The problem of finding the optimal placement of containers taking into account the given technological limitations can be formulated in the form of the problem of optimization of geometric design. Therefore, the purpose of the study is to build a mathematical model of the problem and study its characteristics to develop effective methods of solution. The proposed approach is based on mathematical modeling of relations between geometric objects using the method of phi-functions. This allowed to reduce the solution of the problem to the problem of nonlinear programming.

Keywords: spent nuclear fuel; nuclear and thermal safety; packing optimization problems; mathematical modeling; phi-function.

Вступ

На сьогоднішній день важливою науковою проблемою є проблема створення умов для безпечного зберігання відпрацьованого ядерного палива (ВЯП). Найпоширенішою та економічно обґрунтованою є технологія так званого «сухого» зберігання, яка передбачає розміщення відпрацьованих тепловиділяючих збірок у спеціальних ємностях, наповнених інертним газом, та подальше їх зберігання у відкритих або закритих зонах зберігання. Створене сховище повинно відповідати всім стандартам безпеки, прийнятим для об'єктів цього типу. Зокрема, не перевищення загального рівня іонізуючого випромінювання та, як показують останні дослідження, дотримання режимів теплового зберігання відпрацьованого ядерного палива.

У процесі створення будь-якого сухого сховища відпрацьованого ядерного палива можна виділити наступні основні етапи: вибір місця зберігання, дизайн сховища, будівництво, експлуатація та виведення з експлуатації. Повна перевірка відповідності сховища та його елементів цим стандартам зазвичай починається на стадії проєктування. На етапі вибору місця зберігання перевірка на відповідність стандартам безпеки проводиться лише з точки зору впливу сховища в цілому на навколишнє середовище. Цей підхід не можна вважати повністю доцільним, оскільки, враховуючи, наприклад, усі кліматичні особливості розташування майбутнього сховища, можна регулювати режими теплового зберігання відпрацьованого ядерного палива. Подібним чином, можна вважати необхідним проаналізувати та вибрати форму площадки зберігання, щоб вмістити максимально можливу кількість контейнерів з ВЯП. Такий вибір, очевидно, слід робити з урахуванням норм ядерної, радіаційної та теплової безпеки, а також з дотриманням технологічних обмежень.

Проблему пошуку оптимального розміщення контейнерів з урахуванням заданих технологічних обмежень можна сформулювати у вигляді задачі оптимізації геометричного проєктування.

Теорія оптимізаційного геометричного проєктування є однією із інструментів вивчення та оптимізації складних технічних систем з метою досягнення стану їх оптимального функціонування. Вона призначена для розв'язання ряду прикладних оптимізаційних задач розміщення геометричних об’єктів. Ці задачі пов’язані зі створенням енерго- та ресурсозберігаючих технологій в пріоритетних галузях народного господарства (енергетиці, машино-, судно-, авіабудуванні, будівництві, хімічній промисловості, а також у наукових дослідженнях в області нанотехнологій, в сучасних задачах біології, мінералогії, медицини, матеріалознавства, у робототехніці, задачах кодування інформації, системах розпізнавання образів, системах керування космічними апаратами) при автоматизації та моделюванні процесів розміщення різних об'єктів.

Метою дослідження є побудова адекватної математичної моделі задачі пошуку оптимального розміщення контейнерів з ВЯП та дослідження її основних властивостей, які визначать напрями розробки ефективних методів пошуку розв’язку.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Проблема зберігання відпрацьованого ядерного палива (ВЯП) у світі, зокрема в Україні, останнім часом стає все більш актуальною [1-2]. Оскільки частка ядерної енергії в загальній кількості виробленої електроенергії традиційно висока й перевищує 50 %, щороку енергетичні реактори чотирьох діючих атомних електростанцій (АЕС) утворюють значну кількість високоактивних радіоактивних відходів та ВЯП. Проблема поводження з ВЯП енергетичних реакторів в Україні регулюється, зокрема, наказом Міністерства енергетики України від 03 вересня 2020 р. № 566 «Про затвердження Стратегічних напрямів поводження з відпрацьованим ядерним паливом атомних електростанцій України з реакторами типу ВВЕР на період до 2030 року та Плану заходів щодо їх реалізації». Він передбачає тривале зберігання ВЯП на ВП Запорізька АЕС (ЗАЕС), паливо інших діючих атомних електростанцій – у централізованому сховищі ВЯП Чорнобильської зони відчуження. Тривале зберігання ВЯП на території України сьогодні фактично здійснюється лише на найбільшій АЕС – Запорізькій. Пристанційне сховище ЗАЕС призначено для зберігання понад 9 тисяч відпрацьованих тепловиділяючих збірок шести реакторів ВВЕР-1000 та розраховане на експлуатацію близько 50 років, тобто протягом передбачуваного терміну експлуатації ЗАЕС. Окрім ВЯП ЗАЕС, в Україні планується ввести в експлуатацію ще два сховища ВЯП. Це сховище для палива реакторів РБМК-1000 Чорнобильської АЕС (СВЯП-2) та централізоване сховище (ЦСВЯП) для палива інших АЕС України. Обидва ці сухі сховища застосовуватимуть так званий "сухий" спосіб зберігання, тобто без використання води в якості охолоджувача. Метод сухого зберігання ВЯП є досить поширеною стратегією поводження з відпрацьованим паливом для країн з відкритим ядерним паливним циклом. Існує декілька типів сухих сховищ, два з яких будуть використовуватися в Україні – контейнерне сховище на ЦСВЯП та модульне (на СВЯП-2). Незважаючи на різницю в конструкції основного обладнання для зберігання, сухі сховища мають спільні науково-технічні питання безпеки експлуатації, на які слід звертати увагу та спрямовувати зусилля на їх наукову підтримку.

Серед таких проблем можна виділити проблему оптимального використання площі зберігання. Вирішення проблеми пошуку оптимального розміщення контейнерів з ВЯП може бути зведене до вирішення проблеми пошуку оптимального розміщення заданого набору конгруентних кіл у багатозв'язній області з урахуванням технологічних обмежень. Сьогодні багато досліджень присвячені задачам упаковки рівних кіл у квадрат. Проблема вивчалась у великій кількості статей як з теоретичної, так і з обчислювальної точки зору. Дослідження включають алгоритми променевого пошуку [3], автоматизовані докази оптимальності [4] та підходи, що використовують методи нелінійного програмування [5].

Різні евристичні підходи для розв'язання задачі розміщення рівних кіл у круглому контейнері були запропоновані в [6, 7].

В даний час багато статей розглядають задачу упаковки фіксованого набору об'єктів у заданий об'єкт, з метою мінімізації його розмірів. Кілька статей вирішують цю проблему за допомогою нелінійних моделей та методів оптимізації. У роботі [8] наведено огляд таких досліджень. Також у [8] розглядається велика різноманітність моделей нелінійного програмування для задачі мінімізації розмірів об'єктів у 2*D*-задачах упаковки (квадрат, прямокутник, трикутник та коло).

Слід відзначити, що відомі нам дослідження не вирішують задачу упаковки рівних кругів у багатозв'язну область, межа якої складається з дуг кіл і відрізків прямих ліній.

Постановка проблеми

Загальну постановку оптимізаційної задачі геометричного проєктування можна сформулювати таким чином: визначити, з урахуванням всіх правил, вимог та технологічних обмежень таке просторове розміщення визначеного набору геометричних об'єктів в заданому контейнері, при якому критерій оптимізації приймав би екстремальне значення.

Таким чином, для постановки задачі розміщення контейнерів з ВЯП в термінах задачі оптимізаційного геометричного проєктування необхідно в аналітичному вигляді визначити:

1. просторову форму області розміщення;
2. просторову форму об'єктів, які необхідно розмістити в області розміщення;
3. технологічні умови розміщення заданого набору об'єтів у межах зони розміщення;
4. критерій оптимізації розміщення контейнерів.

Формалізуємо кожен з перелічених пунктів.

Просторова форма області розміщення. Зовнішній контур геометричної форми P може бути визначений у відповідності до топографічних умов обраної місцевості.

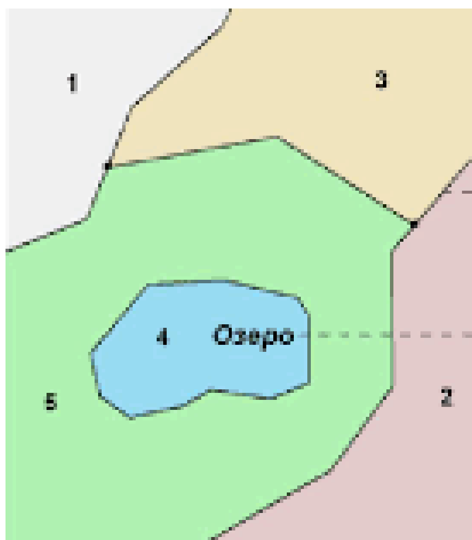


Рис.1. Врахування топографічних умов обраної місцевості при проєктуванні майданчика

Топологічна форма області P може бути однозв'язна або багатозв'язна. Майданчик P може бути багатозв'язною областю через те, що в середині майданчика можуть знаходитись участки, в яких неможливо розмістити контейнери (наприклад, це може бути службова зона обслуговування чи особливості рельєфу).

Для математичного моделювання задачі аппроксимуємо зовнішню межу майданчика набором відрізків прямих ліній та дугами кіл. Припустимо, що P формується наступним чином:

$$P = cl\left(P_0 \setminus \bigcup_{l=1}^{\sigma} A_l \right),$$

де $cl(\cdot)$ є замикання $(\cdot)$; P_0 являє собою просту зв'язану множину, межа якої утворена послідовністю відрізків лінії $\left[x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}\right]$ і дуг кіл $\left[x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}, \bar{x}_j, \bar{y}_j, \bar{r}_j\right]$, де (x_i, y_i) і (x_{i+1}, y_{i+1}) є координатами початку та кінця відрізка або дуги, $(\bar{x}_j, \bar{y}_j)$ і $\bar{r}_j$ є центральними координатами та радіусом кола відповідно; A_l є зоною заборони на розміщення контейнерів та може бути представлена як

$$A_l = \left(\bigcup_{g=1}^{\psi} C_{lg} \right) \bigcup \left(\bigcup_{q=1}^{\vartheta} M_{lq} \right)$$

$l \in I_\sigma = \{1, 2, ..., \sigma\}$;

$C_{lg} = \{(x, y) \in R^2 : (x - x_{lg}^0)^2 + (y - y_{lg}^0)^2 - (\rho_{lg}^0)^2 \le 0\}, g \in I_\psi = \{1, 2, ..., \psi\}$,

M_{lq} – опуклий багатокутник, заданий m_{lq} вершинами, $q \in I_\vartheta = \{1, 2, ..., \vartheta\}$, тобто кожна зона заборони – це не опукла множина, яка може бути представлена кінцевим об'єднанням різних кіл та опуклих багатокутників (рис. 2).

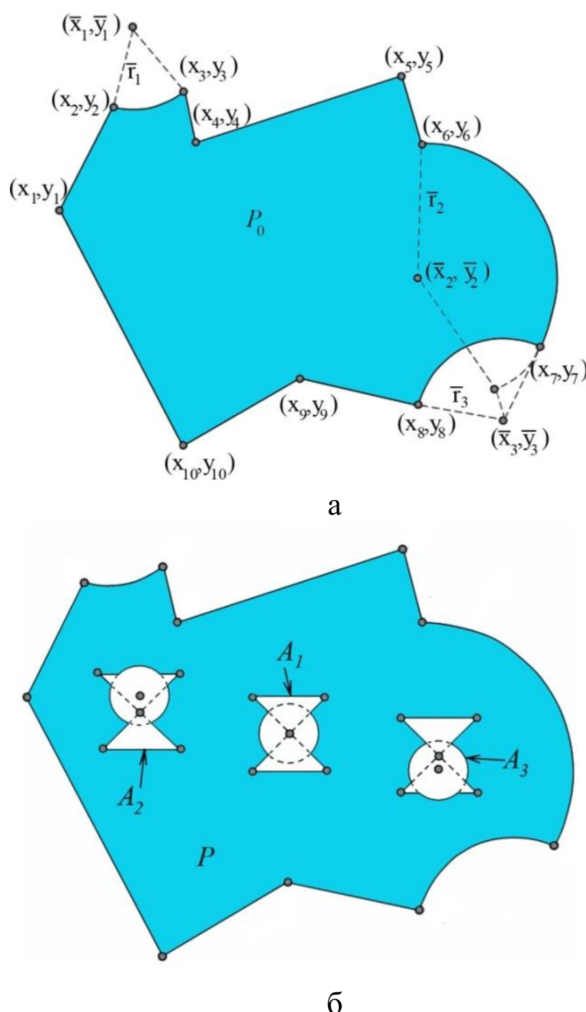


Рис. 2. Приклад вигляду області P
а) однозв'язна область;
б) багатозв'язна область

Описаний спосіб задання області P дозволить з певним рівнем наближення описати будь-яку форму.

Просторова форма об'єктів, які необхідно розмістити в області розміщення. Нехай задано набір з N циліндричних контейнерів $K_i, i \in I_N$, з ВЯП та майданчик P для їх зберігання. Важливою особливістю задачі є те, що всі контейнери з ВЯП є конгруентними (мають однакову форму та геометричні розміри) (рис. 3) і повинні розташовуватись лише на одному рівні (не допускається розміщення контейнерів один над одним).



Рис. 3. Просторова форма контейнерів з ВЯП

Враховуючи вказані особливості, набір контейнерів K_i, $i \in I_N$, можна представити набором конгруентних кругів C_i з радіусами $r, i \in I_N$. Позначимо через $u_i = (x_i, y_i)$ – координати центру C_i. Тоді розташування всіх C_i, $i \in I_N$, в R^2 можна визначити за допомогою вектора $u = (u_1, u_2, ..., u_N) \in R^{2N}$. Надалі круг C_i, трансльований на вектор $u_i = (x_i, y_i)$, позначимо як $C_i(u_i)$.

Технологічні умови розміщення заданого набору об'єктів в межах зони розміщення. Такі обмеження можна поділити на два типи.

Перший тип обмежень обумовлений забезпеченням необхідних параметрів безпеки, а саме, неперевищення загального рівня іонізуючого випромінювання та дотримання режимів теплового зберігання відпрацьованого ядерного палива. Для опису першого типу умов розміщення контейнерів формалізуємо вплив кожного контейнеру на загальний тепловий режим та рівень іонізуючого випромінення майданчика. Оскільки кожен контейнер характеризується своїми фізичними властивостями (температурою та рівнем іонізуючого випромінювання), які необхідно враховувати для дотримання умов безпечного зберігання, то кожному C_i поставимо у

відповідність інтегральний показник k_i теплової та радіаційної властивостей контейнера з ВЯП. Цей параметр визначатиме інтегральний рівень впливу кожного контейнера на температуру контейнерів, що розміщені поруч і, разом з тим, на загальний тепловий рівень та рівень іонізуючого випромінювання майданичка *P*.

Припускаємо, що значення інтегральних коефіцієнтів k_i визначається експертним шляхом. Тоді, відповідно до значень k_i, $i \in I_N$, розподілимо кола C_i, $i \in I_N$, по группах G_j, $j \in I_g$. Нехай кожна група складається з q_i, $i \in I_g$, кругів, де g – кількість отриманих груп.

Для того, щоб мінімізувати взаємний вплив іонізуючого випромінювания та температурного режиму контейнерів, задамо мінімально допустимі відстані $d_{ij}^{g}, i, j \in I_g$ між колами кожної групи G_i, $i \in I_g$, та між колами всередині однієї групи.

Таким чином, врахування першого типу технологічних обмежень дозволить забезпечити підвищення температур палива та рівня іонізуючого випромінювання від конейнерів з ВЯП та забезпечити рівномірний розподіл іонізуючого випромінювання в межах майданича при зберіганні на ньому відпрацьованого палива.

Другий тип обмежень обумовлений забезпеченням умов обслуговування контейнерів. Необхідно забезпечити можливість підходу до кожного контейнера спеціальної обслуговуючої техніки для того, щоб повернути контейнер або перемістити контейнер в межах майданчика (рис. 4).



Рис. 4. Забезпечення умов обслуговування контейнерів транспортером

Для забезпечення цієї умови необхідно враховувати розміщення на майданчику так званої «мережі обслуговування» для пересування техніки. Нехай для переміщення техніки необхідно забезпечити наявність смуг з шириною d. Тоді при розміщенні об'єктів необхідно забезпечити умову торкання C_i, $i \in I_N$, смуги заданої ширини d, що забезпечить підхід спеціальної обслуговуючої техніки до контейнера.

Критерій оптимізації розміщення об`єктів. У якості критерія оптимізації оберемо знаходження максимального заповнення обраного майданчика кругами C_i з множини I_N.

Таким чином, після формалізації в аналітичному вигляді всіх умов оптимізаційної задачі геометричного проєктування, сформулюємо постановку задачі в наступному вигляді.

Задача. Визначити вектор $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in R^{2n}$, який гарантує розміщення максимального числа кругів з набору C_i, $i \in I_N$, у заданій області P із забезпеченням виконання заданих технологічних обмежень (рис. 5.).

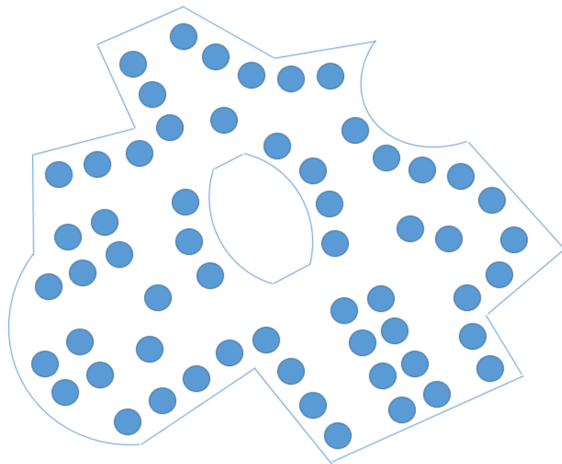




Рис. 5. Постановка задачі розміщення контейнерів з ВЯП

Відповідно до постановки задачі, побудуємо математичну модель задачі та виконаємо дослідження її властивостей.

Математична модель задачі та її властивості

Однією з найважливіших та найскладніших задач комп'ютерного та математичного моделювання розглянутого класу задач є аналітичний опис взаємодії між C_i та областю P. У цій роботі скористаємось методом phi-функцій, представленим, наприклад, в роботах [9, 10]. Цей метод визнаний на сьогоднішній день найефективнішим для розв'язання подібних задач.

З метою формалізації умов розміщення C_i в межах P за допомогою phi-функцій побудуємо наступну множину $G = cl(R^2 \setminus P_0)$. Ця множина завжди може бути представлена кінцевим об'єднанням первинних об'єктів Q_{ij}, $i = 1, 2, 3, 4$, тобто

$$G = \left(\bigcup_{j=1}^{\delta} Q_{1j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{\gamma} Q_{2j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{\xi} Q_{3j}\right),$$

$$\bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{\zeta} Q_{4j}\right)$$

де

$Q_{1j} = \{(x, y) \in R^2 : \chi_{1j}(x, y) \geq 0\}$,

$j \in J_{\delta} = \{1, 2, ..., \delta\}$,

$\chi_{1j}(x, y) = a_{1j}x + b_{1j}y + c_{1j}$,

$Q_{2j} = \{(x, y) \in R^2 : \chi_{2jl}(x, y) \geq 0, l = 1, 2\}$,

$j \in J_{\gamma} = \{1, 2, ..., \gamma\}$,

$\chi_{2jl}(x, y) = a_{2jl}x + b_{2jl}y + c_{2jl}$,

$Q_{3j} = \{(x, y) \in R^2 : \hat{\omega}_{3j}(x, y) \geq 0\}$,

$j \in J_{\xi} = \{1, 2, ..., \xi\}$,

$\hat{\omega}_{3j}(x, y) = \hat{r}_j^2 - (x - \hat{x}_j)^2 - (y - \hat{y}_j)^2$,

$Q_{4j} = \{(x, y) \in R^2 : \chi_{4jl}(x, y) \geq 0,$

$\breve{\omega}_{4j}(x, y) \geq 0, l = 1, 2\}$,

$j \in J_{\zeta} = \{1, 2, ..., \zeta\}$

$\chi_{4jl}(x, y) = a_{4jl}x + b_{4jl}y + c_{4jl}$,

$\breve{\omega}_{4j}(x, y) = (x - \breve{x}_j)^2 + (y - \breve{y}_j)^2 - \breve{r}_j^2$,

$\rho(A, B) \geq 2r$, $\rho(A, B)$ – це відстань між точками A і B, тобто Q_{1j} є напівплощиною, Q_{2j} – опуклий конус; Q_{3j} – коло і Q_{4j} – перетин напівплощини та доповнення кола до R^2 (рис. 6).

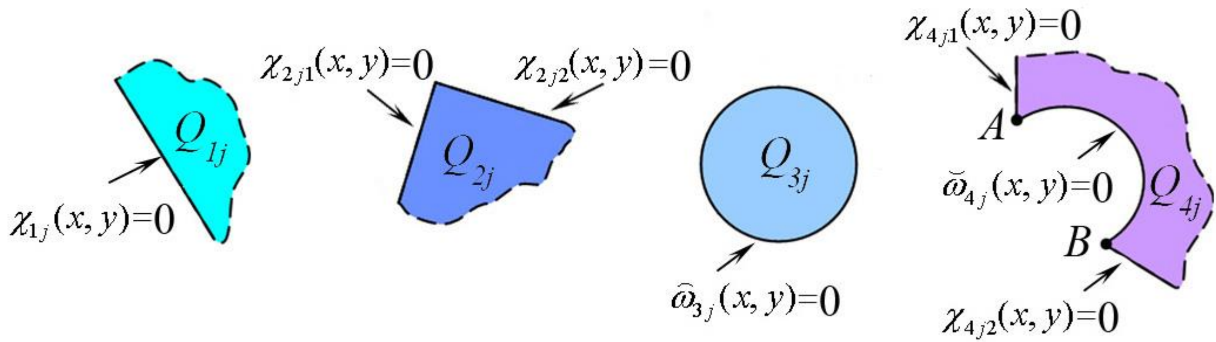


Рис. 6. Об'єкти Q_{1j}, Q_{2j}, Q_{3j}, Q_{4j}

Наприклад, набір G для області P_0, зображений на рис. 1, може бути отриманий у такий спосіб (рис. 7):

$$G = \left(\bigcup_{j=1}^{2} Q_{1j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{2} Q_{2j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{2} Q_{3j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{1} Q_{4j}\right).$$

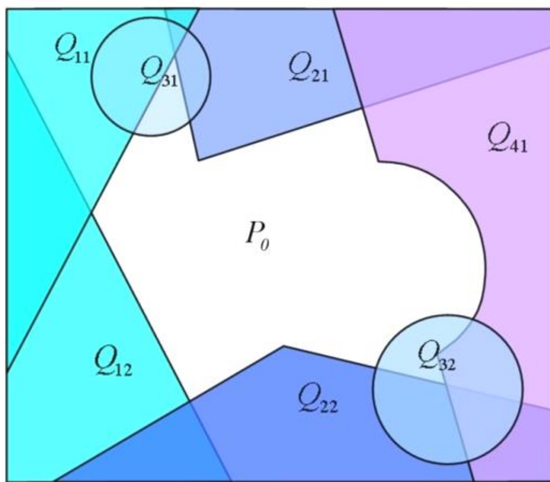


Рис. 7. Представлення множини G

Для розв'язання задачі пропонуємо підхід, який дозволяє звести розв'язання задачі до розв'язання послідовності задач з лінійними цільовими функціями. Для цього радіуси r_i з C_i, $i \in I_\tau$ приймаються змінними. Таким чином, радіуси формують вектор $v^\tau = (r_1, r_2, ..., r_\tau) \in R^\tau$.

Значеннями phi-функції є деякі міри як перетину двох геометричних об'єктів, так і найкоротшої відстані між ними, залежно від їх взаємного розташування в просторі.

Використовуючи phi-функції для первинних об'єктів та складних 2*D*-об'єктів, математичну модель послідовності задач можна представити наступним чином:

$$F_n(X^{n*}) = \max F_n(X^n) = \max \sum_{i=1}^{n} r_i, \quad (1)$$

$$X^n = (u^n, v^n) \in W_n,$$
$$n = 1, 2, ..., \tau + 1,$$

$$W_n = \Big\{ X^n \in R^{3n} : \Phi_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) \ge 0,$$
$$i, j \in I_N,\ \Phi_i(u_i, r_i) \ge 0,$$
$$\tilde{\Phi}_{ij}(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j, \tilde{r}_i, \tilde{r}_j) \ge 0,\ i, j \in I_C,$$
$$r - r_i \ge 0,\ r_i \ge 0,\ i \in I_N \Big\}, \quad (2)$$

де

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - -(r_i + r_j + d^g_{l_i m_j})^2,$$

$\Phi_i(u_i, r_i)$ – phi-функція для C_i і $G_1 = cl(R^2 \setminus P)$,

$$\tilde{\Phi}_{ij}(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j, \tilde{r}_i, \tilde{r}_j) = (\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)^2 - -(\tilde{r}_i + \tilde{r}_j + d)^2,$$

I_C – множина кластерів, які включають кола C_i. Функція $\Phi_i(u_i, r_i)$ описує приналежність C_i до області P.

Phi-функцію для C_i і $G_1 = cl(R^2 \setminus P)$ можна представити наступним чином:

$$\Phi_i(u_i,r_i)=\min\Big\{\Phi_{il}^{CA}(u_i,r_i),\ \Phi_i^{CG}(u_i,r_i),\ \ l\in I_\sigma\Big\}$$

де

$$\Phi_{il}^{CA}(u_i,r_i)=\min\Big\{\Phi_{ilg}^{CC}(u_i,r_i),\ \Phi_{ilq}^{CM}(u_i,r_i), g\in I_\psi, q\in I_\vartheta\Big\},$$

$\Phi_{il}^{CA}(u_i,r_i)$ – phi-функція для C_i і A_l;

$$\Phi_{ilg}^{CC}(u_i,r_i)=(x_i-x_{lg}^0)^2+(y_i-y_{lg}^0)^2-\\-(r_i+\rho_{lg}^0)^2,$$

$\Phi_{ilg}^{CC}(u_i,r_i)$ – phi-функція для C_i і C_{lg};

$$\Phi_{ilq}^{CM}(u_i,r_i)=\max_{k=1,2,...,m_{lq}}\Big\{\max\Big\{\min\Big\{\psi_{ilqk}(u_i,r_i)\ \omega_{ilqk}(u_i,r_i)\big\},\overset{*}{\chi}_{ilqk}(u_i,r_i)\Big\}\Big\},$$

$\Phi_{ilq}^{CM}(u_i,r_i)$ є phi-функцією для C_i і M_{lq};

$$\Phi_i^{CG}(u_i,r_i)=\min\Big\{\Phi_{ij}^{CQ_1}(u_i,r_i),\ j\in I_\delta,\ \Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i,r_i),\ j\in I_\gamma,\Phi_{ij}^{CQ_3}(u_i,r_i),\ j\in I_\xi,\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i,r_i),\ j\in J_\zeta\Big\},$$

$\Phi_i^{CG}(u_i,r_i)$ є phi-функцією для C_i і G;

$$\Phi_{ij}^{CQ_1}(u_i,r_i)=\overset{*}{\chi}_{i1j}(u_i,r_i)=-\chi_{1j}(u_i)-r_i,$$

$$\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i,r_i)=\max\Big\{\min\{\psi_{ij}(u_i,r_i),\omega_{ij}(u_i,r_i)\}\ \overset{*}{\chi}_{i2j1}(u_i,r_i),\overset{*}{\chi}_{i2j2}(u_i,r_i)\Big\},$$

$$\Phi_{ij}^{CQ_3}(u_i,r_i)=(x_i-\hat{x}_j)^2+(y_i-\hat{y}_j)^2-\\-(r_i+\hat{r}_j)^2,$$

$$\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i,r_i)=\max\Big\{\varphi_{ij1}(u_i,r_i),\varphi_{ij2}(u_i,r_i),\ \varphi_{ij3}(u_i,r_i),\omega_{ij3}(u_i,r_i),\ \overset{*}{\chi}_{i4j1}(u_i,r_i),\overset{*}{\chi}_{i4j2}(u_i,r_i)\Big\}$$

$\Phi_{ij}^{CQ_1}(u_i,r_i)$, $\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i,r_i)$, $\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i,r_i)$, $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i,r_i)$ – phi-функції для C_i і Q_{1j}; C_i і Q_{2j}; C_i і Q_{3j}; C_i і Q_{4j} відповідно.

Компоненти функції $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i,r_i)$ мають вигляд:

$$\varphi_{ij1}(u_i,r_i)=\min\Big\{\omega_{ij1}(u_i,r_i),\omega_{ij2}(u_i,r_i),\ \psi_{ij1}(u_i,r_i),\psi_{ij2}(u_i,r_i),\psi_{ij3}(u_i,r_i)\Big\}$$

$$\varphi_{ij2}(u_i,r_i)=\min\Big\{\omega_{ij1}(u_i,r_i),\psi_{ij4}(u_i,r_i)\Big\},$$

$$\varphi_{ij3}(u_i,r_i)=\min\Big\{\omega_{ij2}(u_i,r_i),\psi_{ij5}(u_i,r_i)\Big\},$$

$$\omega_{ij1}(u_i,r_i)=(x_i-x_{j1})^2+(y_i-y_{j1})^2-r_i^2,$$

$$\omega_{ij2}(u_i,r_i)=(x_i-x_{j2})^2+(y_i-y_{j2})^2-r_i^2,$$

$$\omega_{ij3}(u_i,r_i)=(\breve{r}_j-r_i)^2-(x_i-\breve{x}_j)^2-(y_i-\breve{y}_j)^2$$

$$\psi_{ij1}(u_i,r_i)=a_{j1}x_i+b_{j1}y_i+c_{j1},$$

$$a_{1j}=y_{j4}-y_{j3},\ b_{j1}=-(x_{j4}-x_{j3}),$$

$$c_{1j}=-(a_{1j}x_{j3}+b_{1j}y_{j3}),$$

$$\psi_{ij2}(u_i,r_i)=a_{j2}x_i+b_{j2}y_i+c_{j2},$$

$$a_{j2}=y_{j6}-y_{j5},\ b_{j2}=-(x_{j6}-x_{j5}),$$

$$c_{j2}=-(a_{j2}x_{j5}+b_{j2}y_{j5}),$$

$$\psi_{ij3}(u_i,r_i)=a_{j3}x_i+b_{j3}y_i+c_{j3},$$

$$a_{j3}=y_{j5}-y_{j4},\ b_{j3}=-(x_{j5}-x_{j4}),$$

$$c_{j3}=-(a_{j3}x_5+b_{j3}y_5),$$

$$\psi_{ij4}(u_i,r_i)=a_{j4}x_i+b_{j4}y_i+c_{j4},$$

$$a_{j4}=y_{j3}-y_{j7},\ b_{j4}=-(x_{j3}-x_{j7}),$$

$$c_{j4}=-(a_{j4}x_{j3}+b_{j4}y_{j3}),$$

$$\psi_{ij5}(u_i,r_i)=a_{j5}x_i+b_{j5}y_i+c_{j5},$$

$$a_{j5}=y_{j8}-y_{j6},\ b_{j5}=-(x_{j8}-x_{j6}),$$

$$c_{j5}=-(a_{j5}x_{j6}+b_{j5}y_{j6}),$$

$$\chi_{i4j1}^{*}(u_i, r_i) = -\chi_{4j1}(u_i) - r_i,$$

$$\chi_{i4j2}^{*}(u_i, r_i) = -\chi_{4j2}(u_i) - r_i,$$

(x_{j1}, y_{j1}), (x_{j2}, y_{j2}), (x_{j3}, y_{j3}), (x_{j4}, y_{j4}), (x_{j5}, y_{j5}), (x_{j6}, y_{j6}), (x_{j7}, y_{j7}) і (x_{j8}, y_{j8}) – координати точок A, B, D, E, F, G, M та N, відповідно.

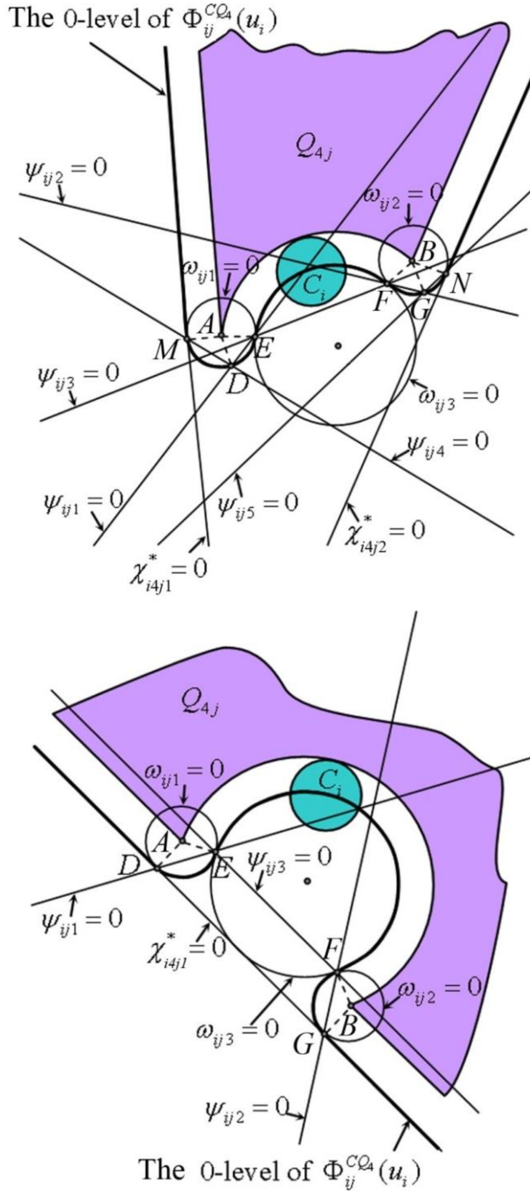


Рис. 8. 0-рівень $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i)$

Якщо границя множини Q_{4j} утворюється однією прямою лінією, то $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i)$ можна написати простіше

$$\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i, r_i) = \max\left\{\varphi_{ij1}(u_i, r_i),\ \omega_{ij3}(u_i, r_i), \chi_{i4j1}^{*}(u_i, r_i)\right\}.$$

$\Phi_i(u_i, r_i) \geq 0$, якщо хоча б одна із систем нерівності виду

$$\Gamma_i^s(u_i, r_i) = \begin{cases} \Phi_{ij}^{CQ_1}(u_i, r_i) \geq 0,\ j \in J_\delta, \\ \Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i, r_i) \geq 0,\ j \in J_\gamma, \\ \Phi_{ij}^{CQ_3}(u_i, r_i) \geq 0,\ j \in J_\xi, \\ \Phi_{ij}^{CQ_4}\zeta_{ij}(u_i, r_i) \geq 0,\ j \in J_\zeta, \\ \Phi_{ilg}^{CC}(u_i, r_i) \geq 0, l \in I_\sigma, g \in I_\psi, \\ \Phi_{ilq}^{CM}(u_i, r_i) \geq 0, l \in I_\sigma, q \in I_\vartheta, \end{cases}$$

виконується, де $\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i, r_i) \geq 0$ є або однією з нерівностей $\chi_{i2j1}^{*}(u_i, r_i) \geq 0$, $\chi_{i2j2}^{*}(u_i, r_i) \geq 0$ або система нерівностей $\begin{cases} \omega_{ij}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \psi_{ij}(u_i, r_i) \geq 0; \end{cases}$

$\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i, r_i) \geq 0$ є або однією з нерівностей $\omega_{ij3}(u_i, r_i) \geq 0$, $\chi_{i4j1}^{*}(u_i, r_i) \geq 0$, $\chi_{i4j2}^{*}(u_i, r_i) \geq 0$ або одна із систем нерівностей $\begin{cases} \omega_{ij1}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \omega_{ij2}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \psi_{ij1}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \psi_{ij2}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \psi_{ij3}(u_i, r_i) \geq 0, \end{cases}$

$\begin{cases} \omega_{ij1}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \psi_{ij4}(u_i, r_i) \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} \omega_{ij2}(u_i, r_i) \geq 0, \\ \psi_{ij5}(u_i, r_i) \geq 0; \end{cases}$

$\Phi_{ilq}^{CM}(u_i, r_i) \ge 0$ або нерівність,

$\overset{*}{\chi}_{ilqk}(u_i, r_i) \ge 0$ або система нерівностей

$$\begin{cases} \omega_{ilqk}(u_i, r_i) \ge 0, \\ \psi_{ilqk}(u_i, r_i) \ge 0. \end{cases}$$

Властивості математичної моделі

Виконаємо дослідження деяких важливих властивостей математичної моделі задачі

$$F_n(X^{n*}) = \max F_n(X^n) = \max \sum_{i=1}^{n} r_i, \quad (3)$$

$$X^n = (u^n, v^n) \in W_n.$$

Якщо $F_n(X^{n*}) = nr$, тоді точка X^{n*} є глобальним максимумом задачі.

1. Якщо $F_{\tau+1}(X^{(\tau+1)*}) < (\tau+1)r$ і $F_\tau(X^{\tau*}) = F_\tau(u^{\tau*}, v^{\tau*}) = \tau \cdot r$, де $X^{(\tau+1)*}$ і $X^{\tau*}$ є глобальними максимумами задачі (3), тоді розв'язання поставленої задачі досягається в точці $u^* = u^{\tau*}$, якому відповідає τ розміщених кругів.
2. Оскільки $F_n(X^n)$ є лінійною, то локальні максимуми досягаються в крайніх точках W_n.
3. W_n задається лінійними та нелінійними нерівностями.
4. $\Phi_i(u_i, r_i) \ge 0$, якщо хоча б одна із систем нерівності виду

$$\Gamma_i^s(u_i, r_i) = \begin{cases} \Phi_{ij}^{CQ_1}(u_i, r_i) \ge 0, j \in J_\delta, \\ \Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i, r_i) \ge 0, j \in J_\gamma, \\ \Phi_{ij}^{CQ_3}(u_i, r_i) \ge 0, j \in J_\xi, \\ \Phi_{ij}^{CQ_4}\zeta_{ij}(u_i, r_i) \ge 0, j \in J_\zeta, \\ \Phi_{ilg}^{CC}(u_i, r_i) \ge 0, l \in I_\sigma, g \in I_\psi, \\ \Phi_{ilq}^{CM}(u_i, r_i) \ge 0, l \in I_\sigma, q \in I_\vartheta, \end{cases}$$

виконується, де $\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i, r_i) \ge 0$ є або однією з нерівностей $\overset{*}{\chi}_{i2j1}(u_i, r_i) \ge 0$, $\overset{*}{\chi}_{i2j2}(u_i, r_i) \ge 0$ або система нерівностей $\begin{cases} \omega_{ij}(u_i, r_i) \ge 0, \\ \psi_{ij}(u_i, r_i) \ge 0; \end{cases}$ $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i, r_i) \ge 0$ є або однією з нерівностей $\omega_{ij3}(u_i, r_i) \ge 0$, $\overset{*}{\chi}_{i4j1}(u_i, r_i) \ge 0$, $\overset{*}{\chi}_{i4j2}(u_i, r_i) \ge 0$ або одна із систем нерівностей

$$\begin{cases} \omega_{ij1}(u_i, r_i) \ge 0, \\ \omega_{ij2}(u_i, r_i) \ge 0, \\ \psi_{ij1}(u_i, r_i) \ge 0, \\ \psi_{ij2}(u_i, r_i) \ge 0, \\ \psi_{ij3}(u_i, r_i) \ge 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{ij1}(u_i, r_i) \ge 0, \\ \psi_{ij4}(u_i, r_i) \ge 0, \end{cases} \begin{cases} \omega_{ij2}(u_i, r_i) \ge 0, \\ \psi_{ij5}(u_i, r_i) \ge 0; \end{cases}$$

$\Phi_{ilq}^{CM}(u_i, r_i) \ge 0$ або нерівність $\overset{*}{\chi}_{ilqk}(u_i, r_i) \ge 0$ або система нерівностей

$$\begin{cases} \omega_{ilqk}(u_i, r_i) \ge 0, \\ \psi_{ilqk}(u_i, r_i) \ge 0. \end{cases}$$

1. З попереднього пункту випливає, що $\Phi_i(u_i, r_i)$ включає функцію $\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i, r_i)$, $j = 1, 2, ..., \gamma$, $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i, r_i)$, $j = 1, 2, ..., \zeta$, і $\Phi_{ilq}^{CM}(u_i, r_i)$, $l = 1, 2, ..., \sigma$, $q = 1, 2, ..., \vartheta$, кожна з яких є функцією виду

$$\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i, r_i) = \max\{\varphi_{ij1}(u_i, r_i), \varphi_{ij2}(u_i, r_i), \varphi_{ij3}(u_i, r_i), \omega_{ij3}(u_i, r_i), \overset{*}{\chi}_{i4j1}(u_i, r_i), \overset{*}{\chi}_{i4j2}(u_i, r_i)\}.$$

Це означає, що якщо хоча б одна з функцій у фігурних дужках є позитивною, тоді відповідна функція $\Phi_{ij}^{CQ_2}(u_i, r_i)$, $\Phi_{ij}^{CQ_4}(u_i, r_i)$ або $\Phi_{ilq}^{CM}(u_i, r_i)$ є позитивною. Тому $\Phi_i(u_i, r_i) \ge 0$, якщо виконується хоча б одна із систем

нерівностей $\Gamma_i^s(u_i, r_i) \ge 0$,

$$s \in I_\varpi = \{1, 2, ..., \varpi = 3^\gamma \cdot 6^\zeta \cdot \prod_{l=1}^{\sigma}\prod_{q=1}^{\vartheta} 2m_{lq}\}.$$

2. На основі попереднього пункту та математичної моделі (3) будь-яке розміщення n кругів у P описується системою нерівностей виду

$$\begin{cases} \Gamma_i^{s_t}(u_i, r_i) \ge 0, \ i \in I_n, \\ \Phi_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) \ge 0, \ i, j \in I_n, \ i < j, \\ r - r_i \ge 0, \ i \in I_n, \\ r_i \ge 0, \ i \in I_n. \end{cases}$$

Система визначає певну підобласть W_{nt}. Кожна система нерівностей складається не менше, ніж з $n(4 + \sigma(\psi + \vartheta) + \frac{1}{2}(n+3))$ лінійних та нелінійних нерівностей.

3. За пунктом 5, кількість підобластей становить $\eta = \varpi^n$. Таким чином, область W_n можна представити як $W_n = \bigcup_{t=1}^{\eta} W_{nt}$.

Слід зазначити, що серед η систем існує ряд несумісних систем.

4. Якщо точка $X^{nl*} \in W_{ni_0}$ – локальний максимум щодо W_{ni_0} і одночасно $X^{nl*} \in W_{ni_j}$, $j \in J_l \subset \{1, 2, ..., \eta_0\}$, то необхідно довести, що X^{nl*} локальний максимум щодо W_n.
5. Задача (1)-(2) є NP важкою.

Висновки

У роботі задача оптимального розміщення контейнерів з ВЯП з урахуванням заданих технологічних обмежень сформульована у вигляді задачі оптимізації геометричного проєктування. Виконано опис всіх умов задачі геометричного проєктування.

Побудовано математичну модель задачі упаковки конгруентних кругів у багатозв'язну область, межа якої складається з дуг кіл та відрізків ліній. Математична модель представлена у вигляді нелінійної задачі оптимізації.

Метод phi-функцій дозволяє нам побудувати математичну модель проблеми, в якій область припустимих розв'язків може бути представлена у вигляді об'єднання підобластей. Кожна з підобластей описується системами нерівностей, ліві частини яких є неперервними функціями. Це дозволяє використовувати сучасні методи нелінійного програмування для розв'язання задачі.

Література

1. Alyokhina, S., Kostikov, A., Kruhlov, S. (2017). *Safety Issues Of The Dry Storage Of The Spet Nuclear Fuel.* Problems Of Atomic Science And Technology, 2 (108), 70-74. DOI: 10.32918/nrs.2018.2(78).05.
2. Alyokhina, S. (2019). *Thermal state of ventilated storage container with spent nuclear fuel under normal operation.* International Journal of Nuclear Energy Science and Technology 4(13), 381-398. DOI: 10.1504/IJNEST.2019.106056.
3. Akeb, H., Hifi, M., and Hallah, R.M. (2009*). A beam search algorithm for the circular packing problem.* Computers & Operations Research 36 (5), 1513-1528. DOI: 10.1016/j.cor.2008.02.003.
4. Markot M.C., Csendes T. (2005). *A new verified optimization technique for the "packing circles in a unit square" problems.* SI AM Journal on Optimization 16, 193-219. DOI: 10.1137/S1052623403425617.1.
5. Mladenović, N., Plastria, F., Urošević, D. (2005). *Reformulation descent applied to circle packing problems.* Computers & Operations Research 32, 2419-2434. DOI: 10.1016/j.cor.2004.03.010.
6. Castillo, I., Kampas, F.J., and Pinter, J.D. (2008). *Solving circle packing problems by global optimization: numerical results and industrial applications.* European Journal of Operational Research, 191(3), 786–802. DOI: 10.1016/j.ejor.2007.01.054.
7. Grosso, A., Jamali, A.R.M.J.U., Locatelli, M., Schoen F. (2010). *Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container.* Journal of Global Optimization 47, 63–81. DOI: 10.1007/s10898-007-9274-6.
8. Birgin E.G., Sobral F.N.C. (2008). *Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems.* Computers & Operations Research 35, 2357-2375. DOI: 10.1016/j.cor.2006.11.002.
9. Stoyan, Y.G., Semkin, V.V., Chugay, A.M. (2016). *Modeling Close Packing of 3D Objects*. Cybern

Syst Anal 52, 296–304. DOI: 10.1007/s10559-016-9826-1.

10. Stoian, Y.E., Chugay, A.M., Pankratov, A.V. et al. (2018*). Two Approaches to Modeling and Solving the Packing Problem for Convex Polytopes.* Cybern. Syst. Anal. 54, 585–593. DOI: 10.1007/s10559-018-0059-3.

References

1. Alyokhina, S., Kostikov, A., Kruhlov, S. (2017). *Safety Issues Of The Dry Storage Of The Spet Nuclear Fuel.* Problems Of Atomic Science And Technology, 2 (108), 70-74. DOI: 10.32918/nrs.2018.2(78).05.
2. Alyokhina, S. (2019). *Thermal state of ventilated storage container with spent nuclear fuel under normal operation.* International Journal of Nuclear Energy Science and Technology 4(13), 381-398. DOI: 10.1504/IJNEST.2019.106056.
3. Akeb, H., Hifi, M., and Hallah, R.M. (2009*). A beam search algorithm for the circular packing problem.* Computers & Operations Research 36 (5), 1513-1528. DOI: 10.1016/j.cor.2008.02.003.
4. Markot M.C., Csendes T. (2005). *A new verified optimization technique for the "packing circles in a unit square" problems.* SI AM Journal on Optimization 16, 193-219. DOI: 10.1137/S1052623403425617.1.
5. Mladenović, N., Plastria, F., Urošević, D. (2005). *Reformulation descent applied to circle packing problems.* Computers & Operations Research 32, 2419-2434. DOI: 10.1016/j.cor.2004.03.010.
6. Castillo, I., Kampas, F.J., and Pinter, J.D. (2008). *Solving circle packing problems by global optimization: numerical results and industrial applications.* European Journal of Operational Research, 191(3), 786–802. DOI: 10.1016/j.ejor.2007.01.054.
7. Grosso, A., Jamali, A.R.M.J.U., Locatelli, M., Schoen F. (2010). *Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container.* Journal of Global Optimization 47, 63–81. DOI: 10.1007/s10898-007-9274-6.
8. Birgin E.G., Sobral F.N.C. (2008). *Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems.* Computers & Operations Research 35, 2357-2375. DOI: 10.1016/j.cor.2006.11.002.
9. Stoyan, Y.G., Semkin, V.V., Chugay, A.M. (2016). *Modeling Close Packing of 3D Objects*. Cybern Syst Anal 52, 296–304. DOI: 10.1007/s10559-016-9826-1.
10. Stoian, Y.E., Chugay, A.M., Pankratov, A.V. et al. (2018*). Two Approaches to Modeling and Solving the Packing Problem for Convex Polytopes.* Cybern. Syst. Anal. 54, 585–593. DOI: 10.1007/s10559-018-0059-3.

Стаття надійшла до редакції
Після доробки